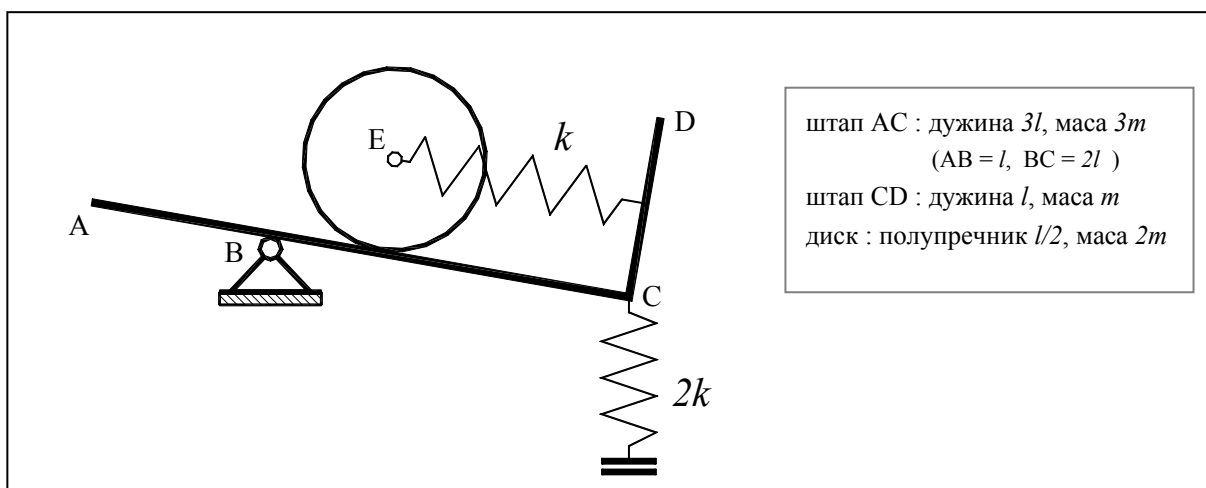
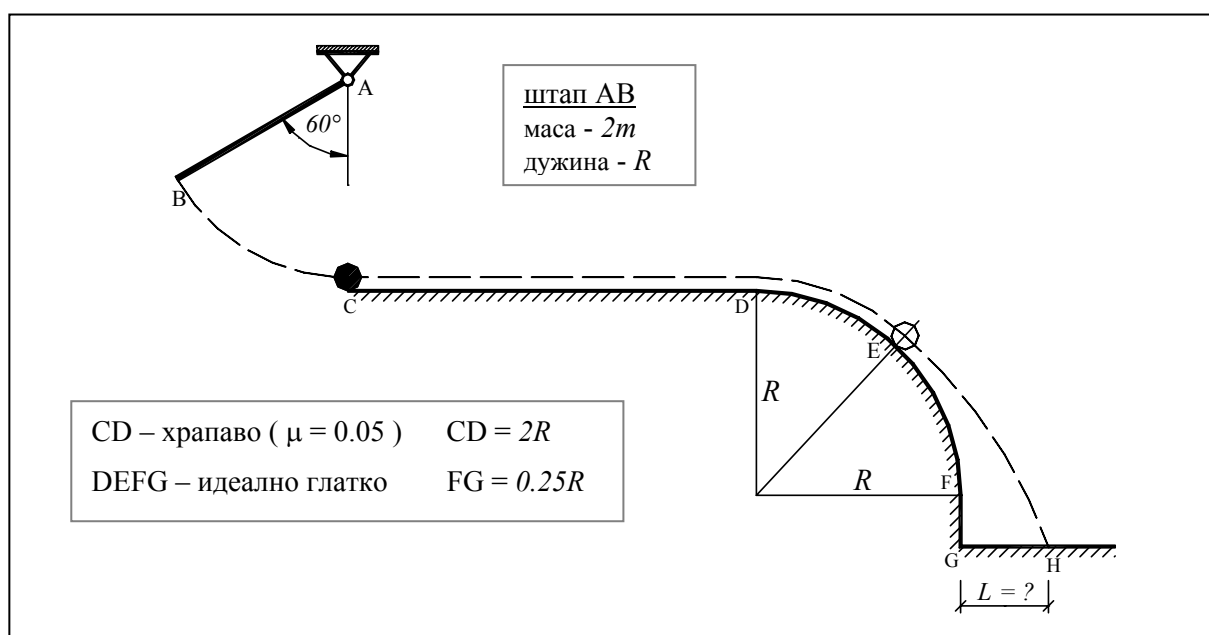


3. ЗАДАТАК: (30%) Механички систем на скици креће се у вертикалној равни. Штапови AC и CD круто су спојени под правим углом у тачки C. Диск се котрља без клизања по штапу AC. Опруга крутости $2k$ је ненапегнута када је штап AC хоризонталан, а дужина опруге крутости k у ненапегнутом стању је l . Написати диференцијалне једначине кретања система.



4. ЗАДАТАК: (30%) Штап AB започиње кретање, без почетне брзине, из положаја као што је приказано на скици. У тренутку проласка кроз вертикалан положај штап удара у материјалну тачку, масе m . Коефицијент удара је $k = 0.4$. Након тога тачка наставља да се креће по подлози C-D-E-F. У положају E тачка напушта подлогу и започиње слободно кретање. Одредити место где тачка напушта подлогу (положај E), као и место пада материјалне тачке на подлогу (положај H; тј. $L = ?$).



НАПОМЕНА: Услов за полагање испита је:

- мин. 20% (од 40%) на 1. и 2. задатку,
- мин. 30% (од 60%) на 3. и 4. задатку.

РЕШЕЊЕ

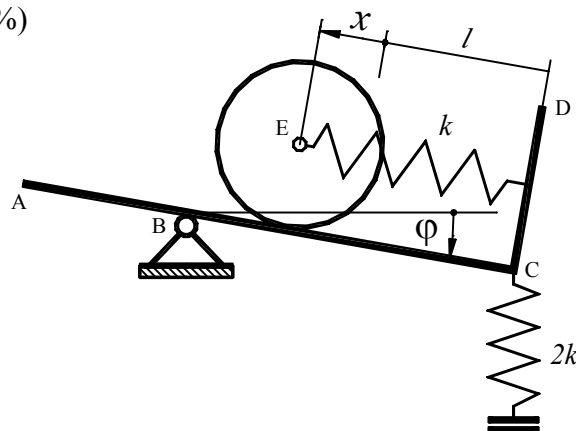
ГРУПА **A**

3. ЗАДАТАК: (30%)

$$\underline{n = 2}$$

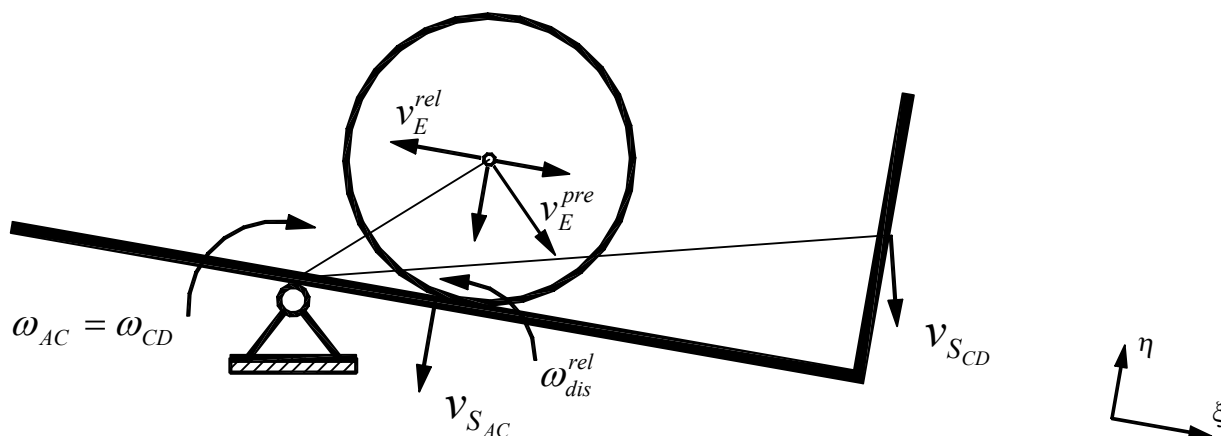
$$q_1 = \varphi$$

$$q_2 = x$$



штап AC : дужина $3l$, маса $3m$
($AB = l$, $BC = 2l$)
штап CD : дужина l , маса m
диск : полупречник $l/2$, маса $2m$

* брзине средишта маса и угаоне брзине свих тела



$$\omega_{AC} = \omega_{CD} = \dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad v_{SAC} = \dot{\varphi} \cdot \frac{l}{2}, \quad v_{SCD} = \dot{\varphi} \cdot \frac{\sqrt{17}}{2} l$$

$$\omega_{dis}^{pre} = \dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad v_{E,\xi}^{pre} = \dot{\varphi} \cdot \frac{l}{2}, \quad v_{E,\eta}^{pre} = \dot{\varphi} \cdot (l - x)$$

$$v_E^{rel} = \dot{x} \quad \Rightarrow \quad \omega_{dis}^{rel} = 2 \frac{\dot{x}}{l}$$

* кинетичка енергија система

$$T_{AC} = \frac{1}{2} \cdot 3m \cdot \left(\dot{\varphi} \frac{l}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{12} \cdot 3m \cdot (3l)^2 \right) \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2$$

$$T_{CD} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\dot{\varphi} \frac{\sqrt{17}}{2} l \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2 \right) \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{13}{6} ml^2 \dot{\varphi}^2$$

$$T_{disk} = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot \left[\left(\dot{\varphi} \frac{l}{2} - \dot{x} \right)^2 + \left(\dot{\varphi} \cdot (l - x) \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2m \cdot \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right) \cdot \left(\dot{\varphi} - 2 \frac{\dot{x}}{l} \right)^2 =$$

$$= \frac{11}{8} ml^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{3}{2} m \dot{x}^2 - \frac{3}{2} ml \dot{x} \dot{\varphi} + mx^2 \dot{\varphi}^2 - 2ml \dot{\varphi} \dot{x}$$

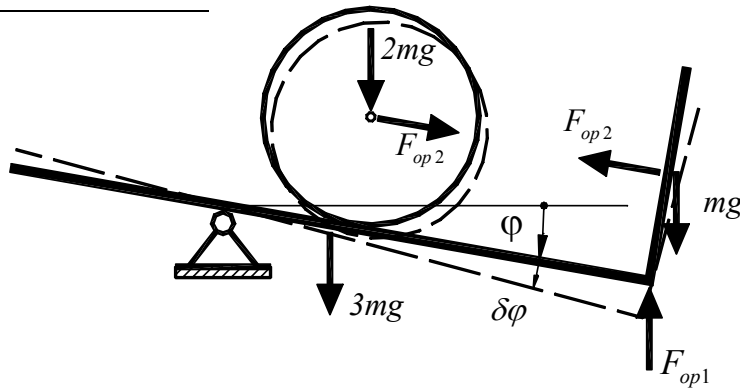
$$T = \sum T_i = \frac{121}{24} ml^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{3}{2} m \dot{x}^2 - \frac{3}{2} ml \dot{x} \dot{\varphi} + mx^2 \dot{\varphi}^2 - 2ml \dot{\varphi} x$$

$$q_1 = \varphi: \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{121}{12} ml^2 \dot{\varphi} - \frac{3}{2} ml \dot{x} + 2mx^2 \dot{\varphi} - 2mlx, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{121}{12} ml^2 \ddot{\varphi} - 3ml \ddot{x} - 2m(2x \cdot \dot{x}) \cdot \dot{\varphi} + 2mx^2 \ddot{\varphi} - 2ml \dot{x}$$

$$q_2 = x: \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 2mx \dot{\varphi}^2 - 2ml \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 3m \dot{x} - \frac{3}{2} ml \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = 3m \ddot{x} - \frac{3}{2} ml \ddot{\varphi}$$

* генералисане силе

$$Q_\varphi = ? \quad (\delta\varphi \neq 0, \delta x = 0)$$



силе у опругама

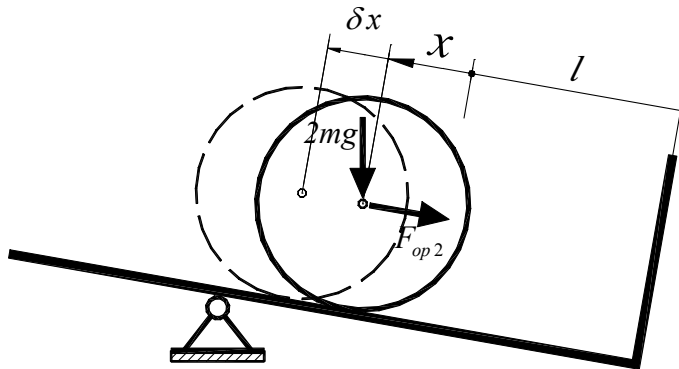
$$F_{op1} = 2k \cdot 2l \sin \varphi$$

$$F_{op2} = k \cdot x$$

$$\delta A = 3mg \cdot \left(\delta\varphi \cdot \frac{l}{2} \cos \varphi \right) + mg \cdot \left(\delta\varphi \cdot \left(2l \cos \varphi + \frac{l}{2} \sin \varphi \right) \right) - F_{op1} \cdot (\delta\varphi \cdot 2l \cos \varphi) + \\ + 2mg \cdot \left(\delta\varphi \cdot \left((l-x) \cdot \cos \varphi + \frac{l}{2} \sin \varphi \right) \right) = Q_\varphi \delta\varphi$$

$$\Rightarrow Q_\varphi = \frac{11}{2} mgl \cos \varphi + \frac{3}{2} mgl \sin \varphi - 2mgx \cos \varphi - 8kl^2 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$Q_x = ? \quad (\delta x \neq 0, \delta\varphi = 0)$$



$$\delta A = -kx \cdot \delta x - 2mg \cdot \sin \varphi \cdot \delta x = Q_x \delta x$$

$$\Rightarrow Q_x = -2mg \sin \varphi - kx$$

* диференцијалне једначине

$$\frac{121}{12} ml^2 \ddot{\varphi} - 3ml \ddot{x} - 4mx \dot{x} \dot{\varphi} + 2mx^2 \ddot{\varphi} - 2ml \dot{x} = \frac{11}{2} mgl \cos \varphi + \frac{3}{2} mgl \sin \varphi - 2mgx \cos \varphi - 8kl^2 \sin \varphi \cos \varphi$$

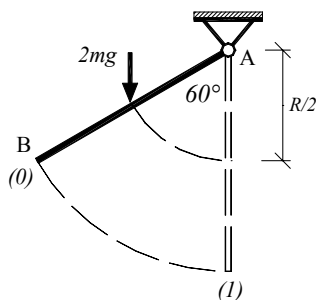
$$3m \ddot{x} - \frac{3}{2} ml \ddot{\varphi} - 2mx \dot{\varphi}^2 + 2ml \dot{\varphi} = -2mg \sin \varphi - kx$$

4. ЗАДАТАК: (30%)

* кретање штапа пре удара

штап АВ
маса - $2m$
дужина - R

$$J_A = \frac{1}{3} 2m \cdot R^2$$



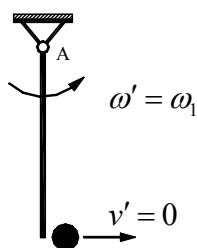
$$T_1 - T_0 = A_{0-1}$$

$$\frac{1}{2} J_A \omega_1^2 - 0 = 2mg \cdot \frac{R}{2} (1 - \cos 60^\circ)$$

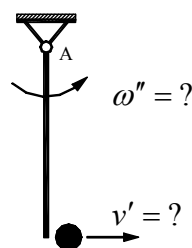
$$\omega_1^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{R} \Rightarrow \omega_1 = 1.225 \sqrt{\frac{g}{R}}$$

* удара штапа у тачку

- пре удара



- после удара



$$D''_{(A)} - D'_{(A)} = 0: (J_A \omega'' + mv'' \cdot R) - (J_A \omega') = 0 \quad \dots (1)$$

$$k = 0.4: -\frac{v'' - \omega'' R}{-\omega' R} = 0.4$$

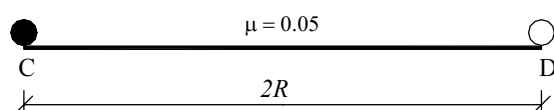
$$\Rightarrow \omega'' R - v'' + k \cdot \omega' R = 0 \quad \dots (2)$$

$$(1) \Rightarrow \omega'' = \omega' - \frac{mR}{J_A} \cdot v'' = \omega' - \frac{3}{2R} \cdot v'' \rightarrow (2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\omega' - \frac{3}{2R} \cdot v'' \right) \cdot R - v'' + 0.4 \cdot \omega' R = 0 \Rightarrow (1 + 0.4) \cdot \omega' R = (1 + 1.5) \cdot v''$$

$$\Rightarrow v'' = 0.56 \cdot \omega' R = 0.686 \sqrt{gR}$$

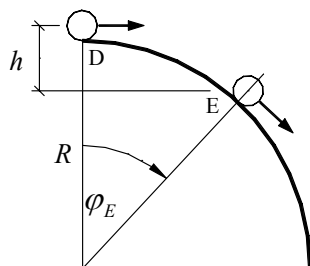
* кретање тачке после удара



$$T_D - T_C = A_{C-D}$$

$$\frac{1}{2} mv_D^2 - \frac{1}{2} mv_C^2 = -\mu \cdot mg \cdot 2R$$

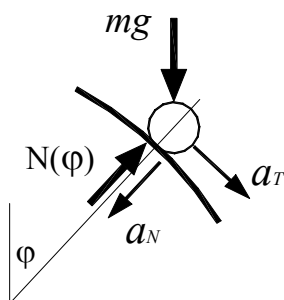
$$v_D^2 = (0.686 \sqrt{gR})^2 - 2 \cdot 0.05 \cdot 2gR = 0.271 \cdot gR \Rightarrow v_D = 0.520 \sqrt{gR}$$



$$T_E - T_D = A_{D-E}$$

$$\frac{1}{2} mv_E^2 - \frac{1}{2} mv_D^2 = mg \cdot R \cdot (1 - \cos \varphi_E)$$

$$v_E^2 = v_D^2 + 2gR \cdot (1 - \cos \varphi_E)$$



* место напуштања подлоге

$$\underline{m \cdot \vec{a} = \vec{F}_R} \quad / \cdot \vec{n}$$

$$m \cdot \frac{v_E^2}{R} = mg \cdot \cos \varphi - N(\varphi)$$

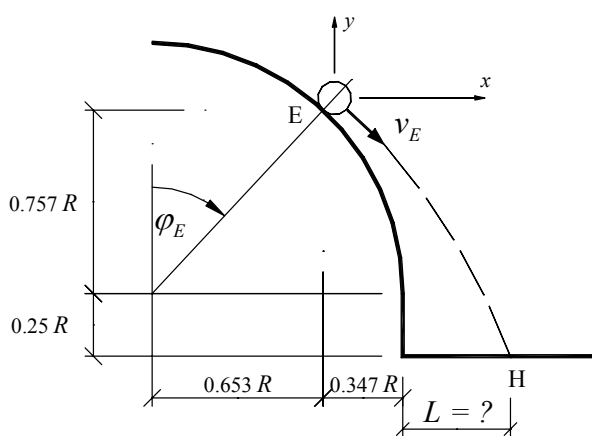
$$N(\varphi) = mg \cdot \cos \varphi - \frac{m}{R} \cdot (v_D^2 + 2gR \cdot (1 - \cos \varphi)) =$$

$$= 3mg \cdot \cos \varphi - 2mg - \frac{m}{R} \cdot v_D^2$$

- услов напуштања подлоге: $N(\varphi_E) = 0 \Rightarrow \cos \varphi_E = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{v_D^2}{gR} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{0.271gR}{gR} = 0.757$

$$\Rightarrow \underline{\varphi_E = 40.81^\circ}$$

* слободно кретања тачке



$$v_E^2 = (0.52\sqrt{gR})^2 + 2gR \cdot (1 - 0.757) = 0.757gR$$

$$\Rightarrow v_E = 0.870\sqrt{gR}$$

поч. усл.: $t = 0$:

$$\dot{x}(0) = v_E \cos \varphi_E$$

$$\dot{y}(0) = v_E \sin \varphi_E$$

$$x(0) = 0$$

$$y(0) = 0$$

- диф. ј-на кретања слободног кретања: $\underline{m \cdot \vec{a} = \vec{F}_R} \quad / \cdot \vec{i}, \vec{j}$

$$m \ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = C_1 \Rightarrow x = C_1 t + C_2$$

$$m \ddot{y} = -mg \Rightarrow \dot{y} = -gt + C_3 \Rightarrow \dot{y} = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_4$$

$$t = 0: C_1 = v_E \cos \varphi_E$$

$$C_2 = 0$$

$$C_3 = -v_E \sin \varphi_E$$

$$C_4 = 0$$

$$\Rightarrow \text{кон. ј-не кретања: } x(t) = 0.757 v_E t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 - 0.653 v_E t$$

- услов пада тачке: $y(t_H) = -1.007 R$

$$-\frac{1}{2}gt_H^2 - 0.653 \cdot 0.87\sqrt{gR} \cdot t_H = -1.007 R$$

$$-0.5 \cdot gt_H^2 - 0.568\sqrt{gR} \cdot t_H + 1.007 R = 0$$

$$\Rightarrow t_{H,1,2} = \frac{0.568\sqrt{gR} \pm \sqrt{0.323gR + 4 \cdot 0.5g \cdot 1.007R}}{-2 \cdot 0.5g} = 0.961\sqrt{\frac{R}{g}}$$

- место пада тачке: $x(t_H) = 0.757 \cdot 0.87\sqrt{gR} \cdot 0.961\sqrt{\frac{R}{g}} = 0.633 R$

$$\Rightarrow \underline{L = \overline{GH} = 0.286 R}$$